

EJERCICIOS PROPUESTOS

3.1 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 20$

c) $\frac{2x+3}{3} + \frac{7x-5}{4} = 7$

b) $\left(\frac{x}{4} - 1\right)\frac{2}{3} - \frac{x-1}{2} = 2x$

d) $1 - \frac{2(x-1)}{5} = \frac{3(2-x)}{2}$

a) $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 20$

M.c.m. de los denominadores 4 y 6: 12

Se multiplica la ecuación por 12: $3x + 2x = 240$

Se reducen términos semejantes: $5x = 240$

Se divide por 5: $x = 48$.

b) $\left(\frac{x}{4} - 1\right)\frac{2}{3} - \frac{x-1}{2} = 2x \Rightarrow \frac{x-4}{4} \cdot \frac{2}{3} - \frac{x-1}{2} = 2x$

Se simplifica: $\frac{x-4}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{x-1}{2} = 2x \Rightarrow \frac{x-4}{6} - \frac{x-1}{2} = 2x$

Se multiplican por 6 la ecuación: $x - 4 - 3x + 3 = 12x$

Se reducen términos semejantes: $-1 = 14x$

Se divide por 14: $x = -\frac{1}{14}$

c) $\frac{2x+3}{3} + \frac{7x-5}{4} = 7$

M.c.m. los denominadores 3 y 4: 12

Se multiplican la ecuación: $8x + 12 + 21x - 15 = 84$

Se reducen términos semejantes: $29x = 87$

Solución: $x = 3$

d) $1 - \frac{2(x-1)}{5} = \frac{3(2-x)}{2}$

$1 - \frac{2x-2}{5} = \frac{6-3x}{2} \Rightarrow 10 - 4x + 4 = 30 - 15x \Rightarrow 11x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{11}$

3.2 Calcula la solución de estas ecuaciones.

a) $x^2 - 10x + 24 = 3$

c) $-x^2 + 2x = 0$

e) $2x - 6 = 2x(x + 2)$

b) $5x^2 - 9x + 4 = 0$

d) $x(2x - 5) = 6 - x$

f) $x^2 - 9 = -2x^2$

a) $x^2 - 10x + 24 = 3 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \quad x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2} = \left\{ \begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix} \right.$

b) $5x^2 - 9x + 4 = 0 \quad x = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4}}{2 \cdot 5} = \frac{9 \pm 1}{10} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{matrix} \right.$

c) $-x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-x + 2) = 0; x = 0 \text{ ó } x = 2$

d) $x(2x - 5) = 6 - x \Rightarrow 2x^2 - 5x = 6 - x \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \right.$

e) $2x - 6 = 2x(x + 2) \Rightarrow 2x - 6 = 2x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 + 2x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + x + 3 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2}$ No tiene solución.

f) $x^2 - 9 = -2x^2 \Rightarrow 3x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

3.3 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^6 - 10x^3 + 9 = 0$

c) $x^4 - 26x^2 = -25$

d) $x^6 - 64x^3 = 0$

e) $4x^2 + 8x = 0$

f) $3x^3 - 12x^2 + 12x = 0$

a) $x^2 = z; x^4 = z^2 \Rightarrow z^2 - 5z + 4 = 0$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

b) $x^3 = z; x^6 = z^2; z^2 - 10z + 9 = 0$

$$z = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} 9 \Rightarrow x^3 = 9 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9} \\ 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

c) $x^2 = z \Rightarrow x^4 = z^2; z^2 - 26z + 25 = 0$

$$z = \frac{26 \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{26 \pm 24}{2} = \begin{cases} 25 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5 \\ 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

d) $x^3(x^3 - 64) = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x^3 = 64 \Rightarrow x = 4$

e) $4x(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = -2$

f) $3x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2 \Rightarrow$ Raíz doble

3.4 Halla las soluciones de estas ecuaciones.

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

b) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$

a)
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

Soluciones: $x = 1, x = -1$ y $x = -2$

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -6 & 3 & 10 \\ -1 & & -1 & 7 & -10 \\ \hline & 1 & -7 & 10 & 0 \end{array}$$

Soluciones: $x = -1, x = 2$ y $x = 5$

$$P(x) = (x + 1)(x^2 - 7x + 10)$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

3.5 Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{2}{x} - \frac{2 - x}{x + 3} = 1$

b) $\frac{x}{x + 1} + \frac{2}{x + 2} = 3$

a) $\frac{2(x + 3)}{x(x + 3)} - \frac{(2 - x)x}{x(x + 3)} = \frac{x(x + 3)}{x(x + 3)} \Rightarrow 2x + 6 - 2x + x^2 = x^2 + 3x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$

b) $\frac{x(x + 2)}{(x + 1)(x + 2)} + \frac{2(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{3(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)(x + 2)} \Rightarrow x^2 + 2x + 2x + 2 = 3x^2 + 9x + 6 \Rightarrow 2x^2 + 5x + 4 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-7}}{4} \Rightarrow \text{No existe solución.}$$

3.6 Resuelve estas ecuaciones radicales.

a) $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = x + 2$

b) $\sqrt{40 - x^2} + 4 = x$

c) $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 4} = 6$

d) $\sqrt{6 + x} + 2x = -2$

a) $(\sqrt{x^2 + 5x + 1})^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow x^2 + 5x + 1 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x = 3$

Comprobación: $\sqrt{3^2 + 5 \cdot 3 + 1} = 3 + 2$

b) $(\sqrt{40 - x^2})^2 = (x - 4)^2 \Rightarrow 40 - x^2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow 2x^2 - 8x - 24 = 0$

$$x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 8}{2} = \begin{cases} 6 \\ -2 \end{cases}$$

Comprobación: $x = 6 \Rightarrow \sqrt{40 - 6^2} + 4 = 6 \Rightarrow$ Sí es correcto.

$x = -2 \Rightarrow \sqrt{40 - (-2)^2} + 4 \neq -2 \Rightarrow$ No es correcto.

c) $(\sqrt{2x - 1})^2 = (6 - \sqrt{x + 4})^2 \Rightarrow 2x - 1 = 36 - 12\sqrt{x + 4} + x + 4 \Rightarrow (12\sqrt{x + 4})^2 = (41 - x)^2$
 $144(x + 4) = 1681 - 82x + x^2 \Rightarrow 144x + 576 = 1681 - 82x + x^2 \Rightarrow x^2 - 226x + 1105 = 0$

$$x = \frac{226 \pm \sqrt{(-226)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1105}}{2 \cdot 1} = \frac{226 \pm 216}{2} = \begin{cases} 221 \\ 5 \end{cases}$$

Comprobación: $x = 5 \Rightarrow \sqrt{2 \cdot 5 - 1} + \sqrt{5 + 4} = 6 \Rightarrow$ Sí es correcto.

$x = 221 \Rightarrow \sqrt{2 \cdot 221 - 1} + \sqrt{221 + 4} = 21 + 15 \neq 6 \Rightarrow$ No es correcto.

d) $(\sqrt{6 + x})^2 = (-2 - 2x)^2 \Rightarrow 6 + x = 4 + 8x + 4x^2 \Rightarrow 4x^2 + 7x - 2 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 4} = \frac{-7 \pm 9}{8} = \begin{cases} \frac{1}{4} \\ -2 \end{cases}$$

Comprobación: $x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{6 + \frac{1}{4}} + 2\frac{1}{4} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow$ No es correcto.

$x = -2 \Rightarrow \sqrt{6 - 2} + 2(-2) = 2 - 4 = -2 \Rightarrow$ Sí es correcto.

3.7 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2 \log_2 x = 10$

b) $\log_x 625 = 4$

c) $3 \log x = -6$

d) $\ln(3 - x) = 0$

a) $2 \log_2 x = 10 \Rightarrow \log_2 x = 5 \Rightarrow x = 2^5 \Rightarrow x = 32$

b) $\log_x 625 = 4 \Rightarrow x^4 = 625$, luego $x = 5$

c) $3 \log x = -6 \Rightarrow \log x = -2 \Rightarrow x = 10^{-2} \Rightarrow x = 0,01$

d) $\ln(3 - x) = 0 \Rightarrow 3 - x = 1 \Rightarrow x = 2$

3.8 Encuentra la solución de estas ecuaciones.

a) $\log x + \log 50 = 4$

b) $\log x + \log 100 = 0$

c) $\log x^3 - 2 \log x = \log 10$

d) $\log 3x - 1 = 0$

a) $\log 50x = 4 \Rightarrow 50x = 10^4 \Rightarrow 50x = 10000 \Rightarrow x = 200$

b) $\log x + \log 100 = 0 \Rightarrow \log x = -\log 100 \Rightarrow \log x = -2 \Rightarrow x = 10^{-2} \Rightarrow x = 0,01$

c) $\log x^3 - 2 \log x = \log 10 \Rightarrow \log \frac{x^3}{x^2} = \log 10 \Rightarrow \log x = \log 10$; luego $x = 10$

d) $\log 3x = 1 \Rightarrow 10 = 3x \Rightarrow x = \frac{10}{3}$

3.9 ¿Es correcto el proceso de resolución de estas ecuaciones? En caso contrario, indica el error.

a) $\log(x + 1) - \log 2 = \log x \Rightarrow \log\left(\frac{x+1}{2}\right) = \log x \Rightarrow \left(\frac{x+1}{2}\right) = x \Rightarrow x+1 = 2x \Rightarrow x = 1$

b) $\log(x - 2) \cdot \log 2 = \log x \Rightarrow \log(x - 2)^2 = \log x \Rightarrow (x - 2)^2 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4, x = 1$

a) Correcto.

b) Error: $\log(x - 2) \cdot \log 2 \neq \log(x - 2)^2$

3.10 Encuentra la solución de estas ecuaciones.

a) $4 \cdot 5^x = 500$

b) $5 \cdot 5^{2x} = 2500$

c) $6^{2x+2} = 46\,656$

d) $7 \cdot 3^{x-1} = 567$

a) $4 \cdot 5^x = 500 \Leftrightarrow 5^x = 125 \Leftrightarrow 5^x = 5^3 \Leftrightarrow x = 3$

b) $5 \cdot 5^{2x} = 2500 \Leftrightarrow 5^{2x} = 500 \Leftrightarrow \log_5(5^{2x}) = \log_5 500 \Leftrightarrow 2x = \log_5 500 \Leftrightarrow x = \frac{\log 500}{2 \cdot \log 5}$

c) $6^{2x+2} = 46\,656 \Leftrightarrow 6^{2x+2} = 6^6 \Leftrightarrow 2x + 2 = 6 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

d) $7 \cdot 3^{x-1} = 567 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 81 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^4 \Leftrightarrow x - 1 = 4 \Leftrightarrow x = 5$

3.11 Resuelve estas ecuaciones exponenciales.

a) $2^x + 2^{x+1} = 384$

b) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} = 775$

c) $9^x - 10 \cdot 3^{x+1} + 81 = 0$

d) $4^x - 9 \cdot 2^x = -20$

a) $2^x + 2 \cdot 2^x = 3 \cdot 2^7 \Leftrightarrow (1 + 2)2^x = 3 \cdot 2^7 \Leftrightarrow 2^x = 2^7 \Leftrightarrow x = 7$

b) $5^x + 5 \cdot 5^x + 25 \cdot 5^x = 775 \Leftrightarrow (1 + 5 + 25) \cdot 5^x = 775 \Leftrightarrow 31 \cdot 5^x = 775 \Leftrightarrow 5^x = 25 \Leftrightarrow x = 2$

c) $(3^x)^2 - 10 \cdot 3 \cdot 3^x + 81 = 0$; Llamamos $3^x = u \Leftrightarrow u^2 - 30u + 81 = 0$

$$\Leftrightarrow u = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81}}{2 \cdot 1} = \frac{30 \pm 24}{2} = \begin{cases} 27 \Leftrightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow 3^x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3 \\ 3 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3^1 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$$

d) $(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x = -20$; Llamamos $2^x = u \Leftrightarrow u^2 - 9u + 20 = 0$

$$\Leftrightarrow u = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm 1}{2} = \begin{cases} 5 \Leftrightarrow 2^x = 5 \Leftrightarrow \log_2(2^x) = \log_2 5 \Leftrightarrow x = \frac{\log 5}{\log 2} \\ 4 \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases}$$

3.12 Resuelve estos sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} \frac{3x}{4} + \frac{2y}{3} = 5 \\ \frac{x}{2} + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(2x - 1) + 9 = 8 - 3y \\ 6x - y = 7 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 9x + 8y = 60 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 8y = 60 \\ 4x + 8y = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 20 \Rightarrow x = 4 \\ 2y = 6 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$

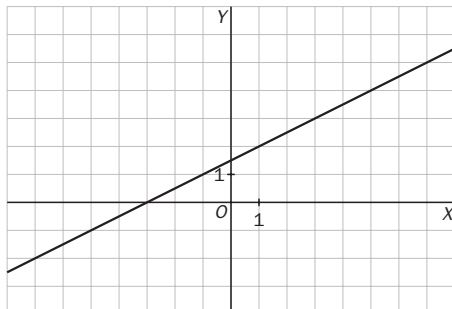
b) $\begin{cases} 4x - 2 + 9 = 8 - 3y \\ 6x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 18x - 3y = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 22x = 22 \Rightarrow x = 1 \\ -y = 7 - 6 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$

3.13 Indica de qué tipo son estos sistemas según el número de soluciones que tienen.

a) $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 3x + 9 = 6y \end{cases}$

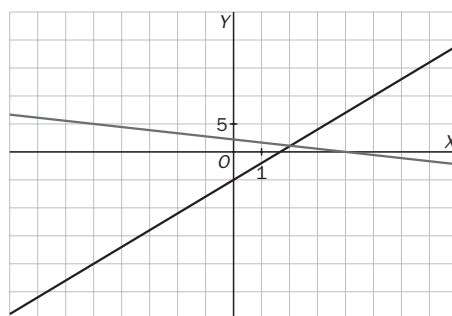
b) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 3x - 6y = -9 \end{cases}$



Las rectas coinciden en todos sus puntos; por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones, es decir, es un sistema compatible indeterminado.

b) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$



El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución en el punto (2, 1).

3.14 Encuentra las soluciones de estos sistemas.

a) $\begin{cases} 2^x - 5^y = 3 \\ 4 \cdot 2^x - 5 \cdot 5^y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^{x+1} - 3^{y+1} = -1 \\ 2^{x+1} + 8 \cdot 3^y = 32 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log x^3 + \log y = 6 \\ \log(xy) = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log x^2 = 2 - 2 \log y \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) = -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^x - 5^y = 3 \\ 4 \cdot 2^x - 5 \cdot 5^y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 3 + 5^y \\ 4 \cdot (3 + 5^y) - 5 \cdot 5^y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 3 + 5^y \\ 12 + 4 \cdot 5^y - 5 \cdot 5^y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 3 + 5^y \\ 5^y = 5 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^{x+1} - 3^{y+1} = -1 \\ 2^{x+1} + 8 \cdot 3^y = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x+1} - 3 \cdot 3^y = -1 \\ 2^{x+1} + 8 \cdot 3^y = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11 \cdot 3^y = -33 \Rightarrow 3^y = 3 \Rightarrow y = 1 \\ 2^{x+1} - 9 = -1 \Rightarrow 2^{x+1} = 8 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log x^3 + \log y = 6 \\ \log(xy) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x^3 + \log y = 6 \\ \log x + \log y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x^3 - \log x = 2 \Rightarrow \log \frac{x^3}{x} = 2 \Rightarrow \log x^2 = 2 \Rightarrow 2 \log x = 2 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10 \\ \log y = 4 - \log 10 \Rightarrow \log y = 3 \Rightarrow y = 1000 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log x^2 = 2 - 2 \log y \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \log x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 0 = 2 - 2 \log y \Rightarrow \log y = 1 \Rightarrow y = 10 \end{cases}$

3.15 Resuelve estos sistemas.

$$a) \begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} (x - y)^2 - xy = 6 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y^2 + 2y^2 = 6 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 & y = -1 \\ x = -2 & y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} (x - y)^2 - xy = 6 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 2x + 1)^2 - x(2x - 1) = 6 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-x + 1)^2 - 2x^2 + x = 6 \Rightarrow \\ x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + x = 6 \Rightarrow \\ x^2 + x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} \end{cases}$$

No tiene solución.

$$d) \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{36}{y^2} - 2y^2 = 1 \\ x = \frac{6}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{36}{y^2} - \frac{2y^4}{y^2} = \frac{y^2}{y^2} \Rightarrow 2y^4 + y^2 - 36 = 0 \Rightarrow \\ \text{Llamo } u = y^2 \Rightarrow u^2 = y^4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2u^2 + u - 36 = 0 \Rightarrow u = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-36)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 17}{4} = \begin{cases} 4 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \\ \frac{-9}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{-9}{2} \Rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 2 \quad x = 3 \quad \text{ó} \quad y = -2 \quad x = -3$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.16 La leche desnatada de una determinada marca contiene un 0,25% de materia grasa, y la leche entera, un 4%.

Calcula la cantidad que hay que mezclar de cada tipo para conseguir leche semidesnatada con un 1,5% de grasa.

Cantidad de leche desnatada: x

$$\text{grasa } \frac{0,25x}{100}$$

Cantidad de leche entera: y

$$\text{grasa } \frac{4y}{100}$$

$$\frac{0,25x}{100} + \frac{4y}{100} = \frac{1,5(x + y)}{100} \Rightarrow 0,25x + 4y = 1,5x + 1,5y \Rightarrow 2,5y = 1,25x \Rightarrow x = 2y$$

Doble cantidad de leche desnatada que de entera.

3.17 Un peluquero quiere conseguir una disolución de agua oxigenada al 6%. Dispone de dos botellas, una al 3% y otra al 33%. ¿Cómo debe realizar la mezcla para obtener la disolución que desea? ¿Qué cantidades necesita para lograr aproximadamente un litro?

$$\text{Tipo I: } x \quad 0,03x + 0,33y = 0,06(x + y) \Rightarrow 0,03x + 0,33y = 0,06x + 0,06y$$

$$\text{Tipo II: } y \quad 0,27y = 0,03x \Rightarrow x = 9y$$

Nueve partes de la primera agua oxigenada por cada parte de la segunda.

Para lograr un litro: 0,9 litros al 3% y 0,1 litros al 33%.

ACTIVIDADES

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Ecuaciones de primero y segundo grado

3.18 Resuelve estas ecuaciones lineales.

a) $-4x + 3 = 7x - 19$

b) $\frac{-3x}{4} + \frac{1}{2} = -5x + 26$

c) $-5(2x - 1) + 3x - 2 = -(6x - 4) + 7$

d) $\frac{4x - 3}{5x + 1} = \frac{9}{16}$

e) $\frac{x + 3}{6} + \frac{2x - 1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x - 5}{12} - \frac{2}{3}$

f) $\frac{3(x - 2)}{5} + 2(-3x + 1) - \frac{2}{5} = \frac{-4x + 3}{15} + \frac{16}{3}$

a) $-4x + 3 = 7x - 19 \Rightarrow -11x = -22 \Rightarrow x = 2$

b) $\frac{-3x}{4} + \frac{1}{2} = -5x + 26 \Rightarrow -3x + 2 = -20x + 104 \Rightarrow 17x = 102 \Rightarrow x = 6$

c) $-5(2x - 1) + 3x - 2 = -(6x - 4) + 7 \Rightarrow -10x + 5 + 3x - 2 = -6x + 4 + 7 \Rightarrow x = -8$

d) $\frac{4x - 3}{5x + 1} = \frac{9}{16} \Rightarrow 16(4x - 3) = 9(5x + 1) \Rightarrow 64x - 48 = 45x + 9 \Rightarrow 19x = 57 \Rightarrow x = 3$

e) $\frac{x + 3}{6} + \frac{2x - 1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x - 5}{12} - \frac{2}{3} \Rightarrow 2x + 6 + 8x - 4 + 3 = x - 5 - 8 \Rightarrow 9x = -18 \Rightarrow x = -2$

f) $\frac{3(x - 2)}{5} + 2(-3x + 1) - \frac{2}{5} = \frac{-4x + 3}{15} + \frac{16}{3}$

$9x - 18 - 90x + 30 - 6 = -4x + 3 + 80 \Rightarrow -77x = 77 \Rightarrow x = -1$

3.19 Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores.

a) $3(2x - 5) + 8x - 6 = \frac{x}{2} - (5x + 3)$

b) $\frac{3(x + 3)}{2} - 2(2 - 3x) = 8x - 1 - 2(x + 3)$

c) $\frac{x - 4}{5} - 4(-2x + 1) - \frac{(-4x + 2)}{10} = 2(x - 3) + \frac{5x + 6}{2}$

d) $\frac{6 - 2(x - 3)}{7x} = \frac{8}{-4}$

a) $3(2x - 5) + 8x - 6 = \frac{x}{2} - (5x + 3) \Leftrightarrow 12x - 30 + 16x - 12 = x - 10x - 6 \Leftrightarrow 37x = 36 \Leftrightarrow x = \frac{36}{37}$

b) $\frac{3(x + 3)}{2} - 2(2 - 3x) = 8x - 1 - 2(x + 3) \Leftrightarrow 3x + 9 - 8 + 12x = 16x - 2 - 4x - 12 \Leftrightarrow 3x = -15 \Leftrightarrow x = -5$

c) $\frac{x - 4}{5} - 4(-2x + 1) - \frac{(-4x + 2)}{10} = 2(x - 3) + \frac{5x + 6}{2} \Leftrightarrow \frac{x - 4}{5} + 8x - 4 - \frac{-4x + 2}{10} = 2x - 6 + \frac{5x + 6}{2}$
 $\Leftrightarrow 2x - 8 + 80x - 40 + 4x - 2 = 20x - 60 + 25x + 30 \Leftrightarrow 41x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{41}$

d) $\frac{6 - 2(x - 3)}{7x} = \frac{8}{-4} \Leftrightarrow 6 - 2x + 6 = -14x \Leftrightarrow 12x = -12 \Leftrightarrow x = -1$

3.20 Clasifica en tu cuaderno las siguientes ecuaciones de segundo grado según el número de soluciones distintas que tengan.

- a) $5x^2 + 6x + 2 = 0$ I. 0 soluciones
 b) $-3x^2 + 4x + 5 = 0$ II. 1 solución
 c) $x^2 - 6x + 1 = 0$ III. 2 soluciones
 d) $x^2 - 5 = 0$

a) $b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 5 \cdot 2 < 0 \Rightarrow$ a) I
 b) $b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 > 0 \Rightarrow$ b) III
 c) $b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \Rightarrow$ c) III
 d) $b^2 - 4ac = 0 - 4 \cdot (-5) \cdot 1 > 0 \Rightarrow$ d) III

3.21 Calcula la solución de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

- a) $6x^2 - 11x + 3 = 0$
 b) $x^2 - 6x - 7 = 0$
 c) $x^2 - 6x + 9 = 0$
 d) $-2x^2 + 2x + 24 = 0$
 e) $3x^2 + x + 5 = 0$
 f) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

$$a) x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3}}{2 \cdot 6} = \frac{11 \pm 7}{12} = \begin{cases} \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \\ \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$b) x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 8}{2} = \begin{cases} 7 \\ -1 \end{cases}$$

$$c) x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3 \Rightarrow \text{Raíz doble.}$$

$$d) x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$

$$e) x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{-59}}{6} \Rightarrow \text{No tiene solución.}$$

$$f) x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm 0}{8} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \text{Raíz doble.}$$

3.22 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando un procedimiento diferente de la fórmula general.

- a) $3x^2 - 27 = 0$
 b) $x^2 + 2x + 1 = 0$
 c) $-7x^2 + \frac{5}{2}x = 0$
 d) $(x - 2)^2 - 25 = 0$

$$a) 3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$b) x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \text{Raíz doble}$$

$$c) x \left(-7x + \frac{5}{2} \right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } -7x + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{14}$$

$$d) (x - 2)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 5 \Rightarrow x = 7 \\ x - 2 = -5 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

3.23 Halla la solución de estas ecuaciones de segundo grado.

a) $\frac{3x^2}{2} - \frac{4x-1}{4} = \frac{2x(x-3)}{6} + \frac{17}{12}$

b) $3x^2 - 4x + 5(x^2 - 2) = \frac{3x(x-2)}{2} + 14$

c) $6x^2 - 1 + \frac{2x(-x+3)}{3} = \frac{5x^2-2}{6} - 4x^2 + \frac{59}{6}$

d) $\frac{3(-x+2)}{5} + 4x\left(\frac{-2x+1}{3}\right) = x(-3x+1) - \frac{1}{2}$

e) $\frac{3x-1}{5} = \frac{13}{4x+5}$

a) $\frac{3x^2}{2} - \frac{4x-1}{4} = \frac{2x(x-3)}{6} + \frac{17}{12}$

$$18x^2 - 12x + 3 = 4x^2 - 12x + 17 \Rightarrow 14x^2 = 14 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

b) $3x^2 - 4x + 5(x^2 - 2) = \frac{3x(x-2)}{2} + 14 \Rightarrow 6x^2 - 8x + 10x^2 - 20 = 3x^2 - 6x + 28 \Rightarrow 13x^2 - 2x - 48 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{2 \cdot 13} = \frac{2 \pm 50}{26} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{26} = \frac{1}{13} \\ \frac{-48}{26} = \frac{-24}{13} \end{array} \right.$$

c) $6x^2 - 1 + \frac{2x(-x+3)}{3} = \frac{5x^2-2}{6} - 4x^2 + \frac{59}{6}$

$$36x^2 - 6 - 4x^2 + 12x = 5x^2 - 2 - 24x^2 + 59 \Rightarrow 51x^2 + 12x - 63 = 0 \Rightarrow 17x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 17 \cdot (-21)}}{2 \cdot 17} = \frac{-4 \pm 38}{34} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{34} \\ \frac{-42}{34} = \frac{-21}{17} \end{array} \right.$$

d) $\frac{3(-x+2)}{5} + 4x\left(\frac{-2x+1}{3}\right) = x(-3x+1) - \frac{1}{2}$

$$-18x + 36 - 80x^2 + 40x = -90x^2 + 30x - 15 \Rightarrow 10x^2 - 8x + 51 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 10 \cdot 51}}{2 \cdot 10} = \frac{8 \pm \sqrt{-1976}}{20} \Rightarrow \text{No tiene solución.}$$

e) $\frac{3x-1}{5} = \frac{13}{4x+5} \Rightarrow (3x-1)(4x+5) = 65 \Rightarrow 12x^2 + 15x - 4x - 5 = 65 \Rightarrow 12x^2 + 11x - 70 = 0$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-70)}}{2 \cdot 12} = \frac{-11 \pm 59}{24} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \\ \frac{-70}{24} = \frac{-35}{12} \end{array} \right.$$

Resolución de otros tipos de ecuaciones

3.24 Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando un cambio de variable.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $3x^4 - 15x^2 + 12 = 0$

c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

d) $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$

e) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

f) $x^{10} - 31x^5 - 32 = 0$

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Cambio: $u = x^2 \Rightarrow u^2 - 13u + 36 = 0$

$$u = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm 5}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{array} \right.$$

b) $3x^4 - 15x^2 + 12 = 0$

Cambio: $u = x^2 \Rightarrow 3u^2 - 15u + 12 = 0 \Rightarrow u^2 - 5u + 4 = 0$

$$u = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{array} \right.$$

$$c) x^6 - 7x^3 - 8 = 0$$

$$\text{Cambio: } u = x^3 \quad u^2 = x^6 \Rightarrow u^2 - 7u - 8 = 0$$

$$u = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 9}{2} = \begin{cases} 8 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \\ -1 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$d) x^6 - 2x^3 + 1 = 0$$

$$\text{Cambio: } u = x^3 \quad u^2 = x^6 \Rightarrow u^2 - 2u + 1 = 0$$

$$u = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$e) x^8 - 17x^4 + 16 = 0$$

$$\text{Cambio: } u = x^4 \quad u^2 = x^8 \Rightarrow u^2 - 17u + 16 = 0$$

$$u = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm 15}{2} = \begin{cases} 16 \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2 \\ 1 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

$$f) x^{10} - 31x^5 - 32 = 0$$

$$\text{Cambio: } u = x^5 \quad u^2 = x^{10} \Rightarrow u^2 - 31u - 32 = 0$$

$$u = \frac{31 \pm \sqrt{(-31)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32)}}{2 \cdot 1} = \frac{31 \pm 33}{2} = \begin{cases} 32 \Rightarrow x^5 = 32 \Rightarrow x = 2 \\ -1 \Rightarrow x^5 = -1 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

3.25 Encuentra la solución de estas ecuaciones por factorización.

$$a) -2x^3 + 4x^2 + 18x - 36 = 0$$

$$b) 4x^3 - 24x^2 + 48x - 32 = 0$$

$$c) -3x^4 + 3x^3 + 12x^2 - 12x = 0$$

$$d) 6x^4 - 5x^3 - 43x^2 + 70x - 24 = 0$$

$$a) -2x^3 + 4x^2 + 18x - 36 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -2 & 4 & 18 & -36 \\ 2 & & -4 & 0 & 36 \\ \hline & -2 & 0 & 18 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 2)(-2x^2 + 18) \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\text{Soluciones: } x = 2, x = -3 \text{ y } x = 3$$

$$b) 4x^3 - 24x^2 + 48x - 32 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -24 & 48 & -32 \\ 2 & & 8 & -32 & 32 \\ \hline & 4 & -16 & 16 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 2)(4x^2 - 16x + 16) = \\ &= 4(x - 2)(x^2 - 4x + 4) = \\ &= 4(x - 2)(x - 2)^2 = 4(x - 2)^3 \end{aligned}$$

$$\text{Solución } x = 2 \text{ raíz triple}$$

$$c) -3x^4 + 3x^3 + 12x^2 - 12x = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= -3x(x^3 - x^2 - 4x + 4) = \\ &= -3x(x - 1)(x^2 - 4) = \\ &= -3x(x - 1)(x - 2)(x + 2) \end{aligned}$$

$$\text{Soluciones } x = 0, x = 1, x = 2 \text{ y } x = -2$$

$$d) 6x^4 - 5x^3 - 43x^2 + 70x - 24 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & -5 & -43 & 70 & -24 \\ 2 & & 12 & 14 & -58 & 24 \\ \hline & 6 & 7 & -29 & 12 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 7 & -29 & 12 \\ -3 & & -18 & 33 & -12 \\ \hline & 6 & -11 & 4 & 0 \end{array}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 4}}{2 \cdot 6} = \frac{11 \pm 5}{12} = \begin{cases} \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \\ \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 2)(6x^3 + 7x^2 - 29x + 12) = \\ &= (x - 2)(x + 3)(6x^2 - 11x + 4) = \\ &= 6(x - 2)(x + 3)\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Soluciones: } x = 2, x = -3, x = \frac{4}{3} \text{ y } x = \frac{1}{2}$$

3.26 Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{4}{x-2} - \frac{6}{x+3} = \frac{1}{3}$

c) $\frac{4x+2}{x^2+2x+1} + \frac{3}{2} = \frac{x+5}{x+1}$

b) $\frac{x+1}{3x-2} + \frac{2x+1}{x+5} = \frac{3}{2}$

d) $\frac{3}{x+1} - \frac{6}{x+4} = \frac{-2}{4x-8}$

a) $\frac{4}{x-2} - \frac{6}{x+3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{12(x+3)}{3(x-2)(x+3)} - \frac{18(x-2)}{3(x-2)(x+3)} = \frac{(x-2)(x+3)}{3(x-2)(x+3)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 12x + 36 - 18x + 36 = x^2 + x - 6 \Rightarrow x^2 + 7x - 78 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-78)}}{2 \cdot 1} = \frac{-7 \pm 19}{2} = \begin{cases} 6 \\ -13 \end{cases}$

b) $\frac{x+1}{3x-2} + \frac{2x+1}{x+5} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2(x+1)(x+5)}{2(3x-2)(x+5)} + \frac{2(2x+1)(3x-2)}{2(3x-2)(x+5)} = \frac{3(3x-2)(x+5)}{2(3x-2)(x+5)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + 12x + 10 + 12x^2 - 2x - 4 = 9x^2 + 39x - 30 \Rightarrow 5x^2 - 29x + 36 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 36}}{2 \cdot 5} = \frac{29 \pm 11}{10} = \begin{cases} \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \\ \frac{18}{10} = \frac{9}{5} \end{cases}$

c) $\frac{4x+2}{x^2+2x+1} + \frac{3}{2} = \frac{x+5}{x+1} \Rightarrow \frac{4x+2}{(x+1)^2} + \frac{3}{2} = \frac{x+5}{x+1} \Rightarrow \frac{2(4x+2)}{2(x+1)^2} + \frac{3(x+1)^2}{2(x+1)^2} = \frac{2(x+5)(x+1)}{2(x+1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x + 4 + 3x^2 + 6x + 3 = 2x^2 + 12x + 10 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

d) $\frac{3}{x+1} - \frac{6}{x+4} = \frac{-2}{4x-8} \Rightarrow \frac{3}{x+1} - \frac{6}{x+4} = \frac{-1}{2(x-2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{6(x+4)(x-2)}{2(x+1)(x+4)(x-2)} - \frac{12(x+1)(x-2)}{2(x+1)(x+4)(x-2)} = \frac{-(x+1)(x+4)}{2(x+1)(x+4)(x-2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x^2 + 12x - 48 - 12x^2 + 12x + 24 = -x^2 - 5x - 4 \Rightarrow 5x^2 - 29x + 20 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 20}}{2 \cdot 5} = \frac{29 \pm 21}{10} = \begin{cases} \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \end{cases}$

3.27 Halla la solución de estas ecuaciones radicales.

a) $x - \sqrt{x-6} = 0$

e) $x + \sqrt{x-1} - 3 = 0$

b) $\sqrt{8-x} = 2-x$

f) $\sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4}$

c) $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1$

g) $\sqrt{5x+1} - 2 = \sqrt{x+1}$

d) $2\sqrt{x-1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{x-1}}$

a) $x - \sqrt{x-6} = 0 \Rightarrow (x-6)^2 = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 = x \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases}$

Comprobación: $x = 9 \Rightarrow 9 - 3 - 6 = 0 \Rightarrow$ Es correcto.

$x = 4 \Rightarrow 4 - 2 - 6 \neq 0 \Rightarrow$ No es correcto.

b) $\sqrt{8-x} = 2-x \Rightarrow 8-x = 4-4x+x^2 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

Comprobación: $x = 4 \Rightarrow \sqrt{8-4} \neq 2-4 \Rightarrow$ No es correcto.

$x = -1 \Rightarrow \sqrt{8+1} = 2+1 \Rightarrow$ Es correcto.

$$\text{c) } \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \Rightarrow x - 2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Comprobación: $x = 4 \Rightarrow \sqrt{4} - \frac{2}{\sqrt{4}} = 1 \Rightarrow$ Es correcto; $x = 1 \Rightarrow \sqrt{1} - \frac{2}{\sqrt{1}} \neq 1 \Rightarrow$ No es correcto.

$$\text{d) } 2\sqrt{x-1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{x-1} \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} - \frac{5\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{3}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow 2x - 2 - 5\sqrt{x-1} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5\sqrt{x-1} = -2x + 5 \Rightarrow 25(x-1) = 4x^2 - 20x + 25 \Rightarrow 25x - 25 = 4x^2 - 20x + 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 45x + 50 = 0 \Rightarrow x = \frac{45 \pm \sqrt{(-45)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 50}}{2 \cdot 4} = \frac{45 \pm 35}{8} = \begin{cases} 10 \\ \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\text{Comprobación: } \begin{cases} x = 10 \Rightarrow 2\sqrt{10-1} - 5 = \frac{3}{\sqrt{10-1}} \Rightarrow \text{Es correcto.} \\ x = \frac{5}{4} \Rightarrow 2\sqrt{\frac{5}{4}-1} - 5 \neq \frac{3}{\sqrt{\frac{5}{4}-1}} \Rightarrow 2\frac{1}{2} - 5 \neq \frac{3}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{No es correcto.} \end{cases}$$

$$\text{e) } x + \sqrt{x-1} - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 3 - x \Rightarrow x - 1 = 9 - 6x + x^2 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

Comprobación: $x = 5 \Rightarrow 5 + \sqrt{5-1} - 3 \neq 0 \Rightarrow$ No es correcto; $x = 2 \Rightarrow 2 + \sqrt{2-1} - 3 = 0 \Rightarrow$ Es correcto.

$$\text{f) } \sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4} \Rightarrow 7x+1 = 4(x+4) \Rightarrow 7x+1 = 4x+16 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$$

Comprobación: $x = 5 \Rightarrow \sqrt{7 \cdot 5 + 1} = 2\sqrt{5+4} \Rightarrow$ Sí es correcto.

$$\text{g) } \sqrt{5x+1} - 2 = \sqrt{x+1} \Rightarrow 5x+1 - 4\sqrt{5x+1} + 4 = x+1 \Rightarrow 4x+4 = 4\sqrt{5x+1} \Rightarrow x+1 = \sqrt{5x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 5x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } x = 3$$

Comprobación: $x = 0 \Rightarrow \sqrt{0+1} - 2 \neq \sqrt{1} \Rightarrow$ No es correcto; $x = 3 \Rightarrow \sqrt{5 \cdot 3 + 1} - 2 = \sqrt{3+1} \Rightarrow$ Sí es correcto.

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

3.28 Resuelve las siguientes ecuaciones de tipo exponencial.

$$\text{a) } 6^{3-x} = 216 \qquad \text{c) } 3^x \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x \qquad \text{e) } 13^{2x} - 6 \cdot 13^x + 5 = 0$$

$$\text{b) } \left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3} \qquad \text{d) } 3 \cdot 4^x + 3 \cdot 4^{x+1} + 4^{x+2} = 62 \qquad \text{f) } 10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950$$

$$\text{a) } 6^{3-x} = 216 \Rightarrow 6^{3-x} = 6^3 \Rightarrow 3 - x = 3 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{b) } \left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3} \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-7x+3} \Rightarrow 3x-7 = -7x+3 \Rightarrow 10x = 10 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{c) } 3^x \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} = \left(\frac{1}{27}\right)^x \Rightarrow \frac{3^x}{3^{x-3}} = \frac{1}{3^{3x}} \Rightarrow 3^3 = 3^{-3x} \Rightarrow 3 = -3x \Rightarrow x = -1$$

$$\text{d) } 3 \cdot 4^x + 3 \cdot 4^{x+1} + 4^{x+2} = 62 \Rightarrow 3 \cdot 4^x + 12 \cdot 4^x + 16 \cdot 4^x = 62 \Rightarrow 31 \cdot 4^x = 62 \Rightarrow 4^x = 2 \Rightarrow 2^{2x} = 2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{e) } 13^{2x} - 6 \cdot 13^x + 5 = 0; \text{ Cambio: } u = 13^x \quad u^2 = 13^{2x} \Rightarrow u^2 - 6u + 5 = 0$$

$$u = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} 5 \Rightarrow 13^x = 5 \Rightarrow \log_{13} 13^x = \log_{13} 5 \Rightarrow x = \log_{13} 5 = \frac{\log 5}{\log 13} \\ 1 \Rightarrow 13^x = 1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\text{f) } 10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950 \Rightarrow 10^x - 5 \cdot 5^{x-2} \cdot 2^{x-2} = 950 \Rightarrow 10^2 10^{x-2} - 5 \cdot 10^{x-2} = 950 \Rightarrow 95 \cdot 10^{x-2} = 950 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{x-2} = 10 \Rightarrow x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$$

3.29 Resuelve estas ecuaciones de tipo logarítmico.

a) $\log(x-1) + \log(x+1) = 3 \log 2 + \log(x-2)$

b) $\log(x-2) - \frac{1}{2} \log(3x-6) = \log 2$

c) $\log_9 \sqrt[5]{27} = 2x - 1$

d) $\log_x \frac{\sqrt[5]{8}}{2} = -0,4$

e) $\log_7(x-2) - \log_7(x+2) = 1 - \log_7(2x-7)$

a) $\log(x-1) + \log(x+1) = 3 \log 2 + \log(x-2) \Rightarrow \log[(x-1) \cdot (x+1)] = \log[2^3 \cdot (x-2)] \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 8x - 16 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$$

b) $\log(x-2) - \frac{1}{2} \log(3x-6) = \log 2 \Rightarrow 2 \log(x-2) - \log(3x-6) = 2 \log 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log \frac{(x-2)^2}{3x-6} = \log 2^2 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{3x-6} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 12x - 24 \Rightarrow x^2 - 16x + 28 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28}}{2 \cdot 1} = \frac{16 \pm 12}{2} = \begin{cases} 14 \\ 2 \text{ No vale} \end{cases}$$

c) $\log_9 \sqrt[5]{27} = 2x - 1 \Rightarrow 9^{2x-1} = \sqrt[5]{27} \Rightarrow 3^{4x-2} = 3^{\frac{3}{5}} \Rightarrow 4x - 2 = \frac{3}{5} \Rightarrow 20x - 10 = 3 \Rightarrow 20x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{20}$

d) $\log_x \frac{\sqrt[5]{8}}{2} = -0,4 \Rightarrow \frac{\sqrt[5]{8}}{2} = x^{-0,4} \Rightarrow 2^{\frac{3}{5}-1} = x^{-0,4} \Rightarrow 2^{-\frac{2}{5}} = x^{-0,4} \Rightarrow 2^{-0,4} = x^{-0,4} \Rightarrow x = 2$

e) $\log_7(x-2) - \log_7(x+2) = 1 - \log_7(2x-7) \Rightarrow \log_7(x-2) - \log_7(x+2) = \log_7 7 - \log_7(2x-7) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_7 \frac{x-2}{x+2} = \log_7 \frac{7}{2x-7} \Rightarrow \frac{x-2}{x+2} = \frac{7}{2x-7} \Rightarrow (x-2)(2x-7) = 7(x+2) \Rightarrow 2x^2 - 11x + 14 = 7x + 14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 2x(x-9) = 0 \Rightarrow x = 0. \text{ No es correcta y } x = 9. \text{ Correcta.}$$

Sistemas de ecuaciones

3.30 Indica el número de soluciones de los siguientes sistemas lineales. Hállalas.

a) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - 3y = 6 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 3y = 15 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

3.31 Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{2y}{3} = 6 \\ \frac{-x}{10} + \frac{5y}{6} = -6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3(-2x + 1) - 4y = 1 \\ 4x - 2(3y + 1) = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{2y}{3} = 6 \\ \frac{-x}{10} + \frac{5y}{6} = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 10y = 90 \\ -3x + 25y = -180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -6 \\ x = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ 8x + 15y = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8(y + 1) + 15y = 100 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow 23y = 92 \Rightarrow y = 4$

c) $\begin{cases} 3(-2x + 1) - 4y = 1 \\ 4x - 2(3y + 1) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x - 4y = -2 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12x - 8y = -4 \\ 12x - 18y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + 3y = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$

3.32 Resuelve los siguientes sistemas no lineales.

a) $\begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 25 \\ 3x^2 - y^2 = -25 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = -20 \\ xy = -12 \end{cases}$

e) $\begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + xy + y = 9 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - xy = 5 \\ 3x^2 + xy = x \end{cases} \Rightarrow 4x^2 - x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{8} = \frac{1 \pm 9}{8} = \begin{cases} \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \\ -1 \end{cases} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} & y = 1 - 3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{-11}{4} \\ x = -1 & y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = -20 \\ xy = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-12}{y} \\ 4 \frac{144}{y^2} - y^2 = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 576 - y^4 = -20y^2 \Rightarrow y^4 - 20y^2 - 576 = 0 \\ \text{Cambio: } y^2 = u \quad y^4 = u^2 \quad u^2 - 20u - 576 = 0 \end{cases}$
 $u = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 4 \cdot 576}}{2} = \frac{20 \pm 52}{2} \begin{cases} 36 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = \pm 6 \\ -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 & x = -2 \\ y = -6 & x = 2 \end{cases}$
 No tiene solución

c) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (5-y)^2 - (5-y)y + y^2 = 7 \\ x = 5-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25 - 10y + y^2 - 5y + y^2 + y^2 = 7 \\ 3y^2 - 15y + 18 = 0 \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \begin{cases} 3 \Rightarrow x = 2 \\ 2 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 25 \\ 3x^2 - y^2 = -25 \end{cases} \Rightarrow 8x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm 5$

e) $\begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ (x + y)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = \pm 7 \\ x + y = \pm 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 10 \\ -2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ -2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = -7 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -4 \\ -2y = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -7 \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -10 \\ -2y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + xy + y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1+y) + y = 9 \Rightarrow x = \frac{9-y}{1+y} \\ \left(\frac{9-y}{1+y}\right)^2 + y^2 = 17 \end{cases} \Rightarrow \frac{(9-y)^2}{(1+y)^2} + \frac{y^2(1+y)^2}{(1+y)^2} = \frac{17(1+y)^2}{(1+y)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 81 - 18y + y^2 + y^2 + 2y^3 + y^4 = 17 + 34y + 17y^2 \Rightarrow y^4 + 2y^3 - 15y^2 - 52y + 64 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2 & -15 & -52 & 64 \\ & 1 & 3 & -12 & -64 & \\ \hline & 1 & 3 & -12 & -64 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & 3 & -12 & -64 \\ & 4 & 4 & 28 & 64 \\ \hline & 1 & 7 & 16 & 0 \end{array}$$

$y^4 + 2y^3 - 15y^2 - 52y + 64 = (y-1)(y-4)(y^2 + 7y + 16) \Rightarrow y = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{-25}}{2} \Rightarrow$

No tiene más soluciones $\Rightarrow y = 1 \quad x = 4 \quad \text{ó} \quad y = 4 \quad x = 1$

3.33 Resuelve los siguientes sistemas no lineales.

a) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5^{x+2} - 4^y = -3 \\ 3 \cdot 5^{x+1} - 4^{y-2} = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2 \log x + \log y = 5 \\ \log(xy) = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - 6y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 4 \cdot 2^x + 5 \cdot 5^y = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot 2^x + 4 \cdot 5^y = 36 \\ 4 \cdot 2^x + 5 \cdot 5^y = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^y = 5 \Rightarrow y = 1 \\ 2^x + 5 = 9 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5^{x+2} - 4^y = -3 \\ 3 \cdot 5^{x+1} - 4^{y-2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot 5^{x+1} - 4^2 \cdot 4^{y-2} = -3 \\ 3 \cdot 5^{x+1} - 4^{y-2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot 5^{x+1} - 16 \cdot 4^{y-2} = -3 \\ -48 \cdot 5^{x+1} + 16 \cdot 4^{y-2} = 16 \end{cases} \Rightarrow 5^{x+1} = \frac{-13}{43} \Rightarrow \text{No tiene solución.}$

c) $\begin{cases} 2 \log x + \log y = 5 \\ \log(xy) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log(x^2 \cdot y) = 5 \\ \log(xy) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \cdot y = 10^5 \\ xy = 10^4 \end{cases} \Rightarrow \text{Se divide la primera ecuación entre la segunda} \Rightarrow x = 10; \text{ entonces, } y = 10^3 = 1000$

d) $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - 6y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log(x \cdot y) = 2 \\ x = 1 + 6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot y = 10^2 \Rightarrow (1 + 6y)y = 100 \Rightarrow 6y^2 + y - 100 = 0 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2400}}{12} = \begin{cases} \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\ \frac{-50}{12} = \frac{-25}{6} \end{cases} \end{cases}$

Entonces: $y = 4; x = 25$ ó $y = \frac{-25}{6}; x = -24$

3.34 Dos números suman $\frac{-1}{15}$ y su producto es $\frac{-2}{15}$. Calcúlos. ¿De qué ecuación de segundo grado son solución estos dos números?

$$\begin{cases} x + y = -\frac{1}{15} \\ x \cdot y = -\frac{2}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{15y} + y = -\frac{1}{15} \\ x = -\frac{2}{15y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 + 15y^2 = -y \Rightarrow 15y^2 + y - 2 = 0 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{30} = \frac{-1 \pm 11}{30} \Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \\ \frac{-12}{30} = \frac{-2}{5} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3} & x = -\frac{2}{15 \cdot \frac{1}{3}} = -\frac{2}{5} \\ y = -\frac{2}{5} & x = -\frac{2}{15 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Estos números son solución de la ecuación:

$$\left(x + \frac{2}{5}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow (5x + 2)(3x - 1) = 0 \Rightarrow 15x^2 + x - 2 = 0$$

CUESTIONES PARA ACLARARSE

3.35 Sea la ecuación bicuadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$, con a, b y c distintos de 0.

a) ¿Cabe la posibilidad de que sus soluciones sean $x = 1, x = 3, x = -2$ y $x = 5$? ¿Por qué?

b) ¿Qué condición deben cumplir los coeficientes para que la ecuación anterior no tenga solución?

a) No, porque para que la ecuación sea bicuadrada, las soluciones tienen que ser opuestas dos a dos.

b) Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tendrá solución.

Si $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0$ y los dos números obtenidos son negativos, la ecuación bicuadrada no tendrá solución.

3.36 Indica si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas.

a) $\log_a x = \log_b y \Rightarrow x = y$

c) $\log \sqrt[3]{x^7} = \frac{7}{3} \log x$

b) $a^n = b^m \Rightarrow n = m$

d) $a^{2x-3} = (a^2)^x \cdot \frac{1}{a^3}$

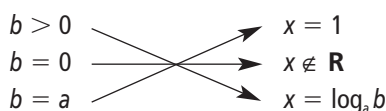
a) Falsa. Solo será cierta si $a = b$.

b) Falsa. Solo será cierta si $a = b$.

c) Verdadera.

d) Verdadera.

3.37 Sea la ecuación exponencial $a^x = b$ (con $a > 1$). Relaciona en tu cuaderno estas dos columnas.



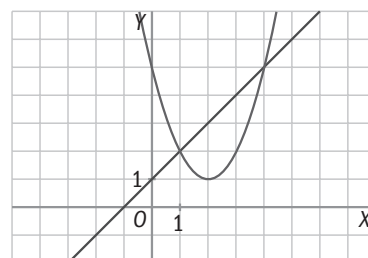
3.38 Las dos gráficas siguientes representan las ecuaciones de un sistema.

a) ¿Es un sistema lineal o no lineal? ¿Por qué?

b) ¿Cuáles son sus soluciones?

a) Es un sistema no lineal. Una de las gráficas no es una recta.

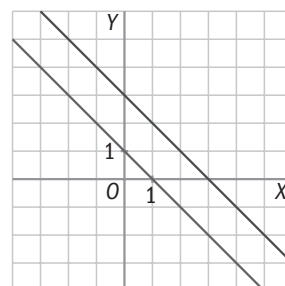
b) Las soluciones son: $x = 1, y = 2$, $y = x = 4, y = 5$.



3.39 Observa las dos rectas correspondientes a un sistema de ecuaciones.

¿Cómo han de ser los coeficientes de las incógnitas en ambas ecuaciones?

Los coeficientes de x y y serán proporcionales, no así el término independiente.



PROBLEMAS PARA APLICAR

3.40 Shalma vive en un poblado de Kenia y debe caminar hasta el poblado vecino para ir a la escuela. En la primera media hora recorre un cuarto del trayecto, y en la media hora siguiente, dos quintos del trayecto restante, quedándole todavía 4,5 kilómetros por recorrer.

¿A qué distancia se encuentra la escuela?

Llamamos x a la distancia de su casa a la escuela.

$$\frac{x}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3x}{4} = x - 4,5 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{6x}{20} = x - 4,5 \Rightarrow 5x + 6x = 20x - 90 \Rightarrow 9x = 90 \Rightarrow x = 10 \text{ km}$$

3.41 Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su diagonal mide 15 centímetros, y su área, 108 centímetros cuadrados.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 15^2 \\ x \cdot y = 108 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{108}{y}\right)^2 + y^2 = 15^2 \\ x = \frac{108}{y} \end{cases} \Rightarrow 108^2 + y^4 = 225y^2 \Rightarrow y^4 - 225y^2 + 11664 = 0$$

Cambio: $u = y^2, u^2 = y^4 \quad u^2 - 225u + 11664 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow u = \frac{225 \pm \sqrt{225^2 - 4 \cdot 11664}}{2} = \frac{225 \pm 63}{2} \quad \begin{cases} 144 \Rightarrow y = 12; x = 9 \\ 81 \Rightarrow y = 9; x = 12 \end{cases}$$

Las soluciones negativas no las consideramos porque las dimensiones de un rectángulo tienen que ser positivas.

El rectángulo tendrá por dimensiones 9×12 cm.

- 3.42 De un rombo se sabe que su área es 120 centímetros cuadrados, y que la proporción existente entre la diagonal mayor y la diagonal menor es 10 : 3.

Calcula la medida de las diagonales.

$$\begin{cases} \frac{Dd}{2} = 120 \\ 3D = 10d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D \frac{3D}{10} = 240 \\ d = \frac{3D}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D^2 = 800 \Rightarrow D = 20\sqrt{2} \text{ cm} \\ d = \frac{3 \cdot 20\sqrt{2}}{10} \Rightarrow d = 6\sqrt{2} \text{ cm} \end{cases}$$

- 3.43 Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Una de ellas advirtió que los apretones de mano fueron 66. ¿Cuántas personas concurrieron a la reunión?

En la reunión hay x personas. Cada persona da la mano a $x - 1$ personas.

$$\frac{x(x-1)}{2} = 66 \Rightarrow x(x-1) = 132 \Rightarrow x^2 - x - 132 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-132)}}{2} = \frac{1 \pm 23}{2} \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ -11 \end{array} \right.$$

Concurrieron 12 personas.

- 3.44 Una ebanista quiere partir un listón de madera de 30 centímetros de longitud en tres trozos para construir una escuadra, de manera que el trozo de mayor longitud mida 13 centímetros. ¿Cuál es la longitud de los otros trozos?

$$\begin{cases} x + y + 13 = 30 \\ x^2 + y^2 = 13^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 17 - y \\ (17 - y)^2 + y^2 = 169 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 289 - 34y + y^2 + y^2 = 169 \Rightarrow \\ 2y^2 - 34y + 120 = 0 \Rightarrow y^2 - 17y + 60 = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 4 \cdot 60}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 12 \text{ cm} \Rightarrow x = 5 \text{ cm} \\ 5 \text{ cm} \Rightarrow x = 12 \text{ cm} \end{array} \right.$$

Los otros dos trozos miden 5 y 12 cm.

- 3.45 La edad de mi nieto será dentro de tres años un cuadrado perfecto, y hace tres años era exactamente la raíz cuadrada de ese cuadrado perfecto. ¿Cuál es la edad actual de mi nieto?

$$\begin{cases} x + 3 = y^2 \\ x - 3 = \sqrt{y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = y^2 \\ x - 3 = y \end{cases} \Rightarrow y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ -2 \end{array} \right. \Rightarrow y = 3, x = 9 - 3 = 6$$

$$\frac{6 = y^2 - y}{6 = y^2 - y}$$

Tiene 6 años.

- 3.46 En unos laboratorios se ha comprobado que el número de células de una muestra se quintuplica cada minuto transcurrido.

Si inicialmente había dos células, ¿cuántos minutos deben transcurrir para que el número de células sea de 19 531 250?

$$2 \cdot 5^x = 19531250 \Rightarrow 5^x = 9765625 \Rightarrow 5^x = 5^{10} \Rightarrow x = 10$$

- 3.47 Una empresa de reciclado de papel mezcla pasta de papel de baja calidad, que compra por 0,25 euros el kilogramo, con pasta de mayor calidad, de 0,40 euros, para conseguir 50 kilogramos de pasta de 0,31 euros el kilogramo.

¿Cuántos kilogramos utiliza de cada tipo de pasta?

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 0,25x + 0,4y = 50 \cdot 0,31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,25x + 0,25y = 12,5 \\ 0,25x + 0,4y = 15,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20 \\ x = 30 \end{cases}$$

$$\frac{-0,15y = -3}{-0,15y = -3}$$

Se utilizan 30 kg de pasta de baja calidad y 20 kg de pasta de mayor calidad.

- 3.48 Utilizando la regla de la división, averigua el dividendo y el divisor de la misma sabiendo que el cociente es 2; el resto, 7, y que el producto de ambos es igual a 490.

$$(2d + 7)d = 490 \Rightarrow 2d^2 + 7d - 490 = 0$$

$$\begin{cases} D = 2d + 7 \\ D \cdot d = 490 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 4 \cdot 2 \cdot 490}}{4} = \begin{cases} 14 \\ -17,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 14 \\ D = 35 \end{cases}$$

El resultado $d = -17,5$ no es entero, por eso no lo consideramos.

- 3.49 Si a uno de los lados de un cuadrado se le aumenta su longitud en 5 centímetros y a su lado contiguo en 3 centímetros, el área de la figura aumenta en 71 centímetros cuadrados. Calcula el lado del cuadrado.

$$(x + 5) \cdot (x + 3) = x^2 + 71 \Rightarrow x^2 + 8x + 15 = x^2 + 71 \Rightarrow 8x = 56 \Rightarrow x = 7 \text{ cm}$$

El lado mide 7 cm.

- 3.50 Las edades actuales de una mujer y su hijo son 49 y 25 años. ¿Hace cuántos años el producto de sus edades era 640?

$$\text{Hace } x \text{ años: } (49 - x)(25 - x) = 640 \Rightarrow 1225 - 74x + x^2 = 640 \Rightarrow x^2 - 74x + 585 = 0$$

$$x = \frac{74 \pm \sqrt{(-74)^2 - 4 \cdot 585}}{2} = \frac{74 \pm 56}{2} = \begin{cases} 65 \\ 9 \end{cases}$$

Hace 65 años no pudo ser porque no habían nacido. Por tanto, la respuesta correcta es hace 9 años.

- 3.51 En la civilización egipcia, debido a las periódicas inundaciones del Nilo, se borraban los lindes de separación de la tierra y, para la reconstrucción de las fincas, necesitaban saber construir ángulos rectos. En un viejo papiro se puede leer lo siguiente: "La altura del muro, la distancia al pie del mismo y la línea que une ambos extremos son tres números consecutivos". Halla dichos números.

Tres números consecutivos: $x, x + 1, x + 2$

$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Los números serán: 3, 4 y 5.

- 3.52 Una agricultora quiere comprobar cuál es el número de hectáreas de superficie que posee su terreno rectangular de cultivo. Sabe que la distancia máxima existente entre dos puntos del mismo es de 25 decámetros y que la proporción entre el largo y el ancho es 4:3. Si una hectárea equivale a 100 decámetros cuadrados, ¿cuántas hectáreas tiene la superficie?

La distancia máxima entre dos puntos del rectángulo corresponderá a la diagonal de este.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25^2 \\ 3x = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3}y \\ \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 625 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{25}{9}y^2 = 625 \Rightarrow y^2 = 225 \Rightarrow y = 15 \text{ dam} \\ x = \frac{4}{3}15 = 20 \text{ dam} \end{cases}$$

Obviamente, solo consideramos las soluciones positivas.

$$\text{Área} = 15 \cdot 20 = 300 \text{ dam}^2 = 3 \text{ hectáreas}$$

- 3.53 Una muestra radiactiva se va desintegrando de modo que, cada cinco años, su masa se reduce a la mitad. Si se tienen 800 gramos de dicha sustancia, ¿en cuánto tiempo se reducirá su masa a 50 gramos?

$$800 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{x}{5}} = 50 \Rightarrow \frac{1}{2^{\frac{x}{5}}} = \frac{1}{16} \Rightarrow 2^{\frac{x}{5}} = 2^4 \Rightarrow \frac{x}{5} = 4 \Rightarrow x = 20 \text{ años}$$

- 3.54 Con la ayuda de los alumnos de varios centros escolares se están rehabilitando las casas de un pueblo abandonado. Ahora se ocupan de la remodelación de un depósito de 1000 metros cúbicos que abastece de agua potable al pueblo. Tiene forma de prisma cuadrangular tal que la altura es el cuadrado del lado de la base menos 15 metros. Calcula la longitud del lado de la base y la altura del depósito.

$$\begin{cases} x^2 \cdot h = 1000 \\ h = x^2 - 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (h + 15) \cdot h = 1000 \\ x^2 = h + 15 \end{cases} \Rightarrow h^2 + 15h - 1000 = 0 \Rightarrow h = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 4000}}{2} = \begin{cases} 25 \\ -40 \end{cases}$$

Nos quedamos con las soluciones positivas: $h = 25$ m

$$x^2 = 40 \Rightarrow x = 2\sqrt{10} \text{ m}$$

REFUERZO

Ecuaciones polinómicas, racionales y radicales

- 3.55 Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando las estrategias estudiadas según el tipo de ecuación.

a) $-2(5x - 1) + \frac{3x - 2}{3} - \frac{55}{3} = 4(x - 1)$

b) $20x^2 + 11x - 3 = 0$

c) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

d) $\frac{5x}{x-4} + 1 = \frac{4}{x+3}$

e) $4x^3 - 4x^2 - 14x + 14 = 0$

f) $\sqrt{12 - x} = x + 8$

a) $-2(5x - 1) + \frac{3x - 2}{3} - \frac{55}{3} = 4(x - 1) \Rightarrow -30x + 6 + 3x - 2 - 55 = 12x - 12 \Rightarrow -39x = 39 \Rightarrow x = -1$

b) $20x^2 + 11x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 240}}{40} = \begin{cases} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{4} \end{cases}$

c) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ cambio $u = x^2 \Rightarrow u^2 - 5u - 36 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow u = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \begin{cases} 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ -4 \Rightarrow \text{No es correcta} \end{cases}$$

d) $\frac{5x}{x-4} + 1 = \frac{4}{x+3} \Rightarrow \frac{(5x)(x+3)}{(x-4)(x+3)} + \frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(x+3)} = \frac{4(x-4)}{(x+3)(x-4)} \Rightarrow$

$$5x^2 + 15x + x^2 - x - 12 = 4x - 16 \Rightarrow 6x^2 + 10x + 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \begin{cases} -\frac{2}{3} \\ -1 \end{cases}$$

e) $4x^3 - 4x^2 - 14x + 14 = 0 \Rightarrow 2x^3 - 2x^2 - 7x + 7 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -2 & -7 & 7 \\ & & 2 & 0 & -7 \\ \hline & 2 & 0 & -7 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1)(2x^2 - 7) \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$2x^2 - 7 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$$

f) $\sqrt{12 - x} = x + 8 \Rightarrow 12 - x = x^2 + 16x + 64 \Rightarrow x^2 + 17x + 52 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 208}}{2} = \begin{cases} -4 \\ -13 \end{cases}$$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

3.56 Calcula la solución de estas ecuaciones exponenciales.

a) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$

b) $2^{x-1} + 2^{x+2} = 72$

c) $\sqrt[3]{128} = 4^{2x}$

a) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0 \Rightarrow 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$; cambio $2^x = u \Rightarrow u^2 - 9u + 8 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow u = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \begin{cases} 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3 \\ 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

b) $2^{x-1} + 2^{x+2} = 72 \Rightarrow 2^{x-1} + 2^3 \cdot 2^{x-1} = 72 \Rightarrow 9 \cdot 2^{x-1} = 72 \Rightarrow 2^{x-1} = 8 \Rightarrow 2^{x-1} = 2^3 \Rightarrow x = 4$

c) $\sqrt[3]{128} = 4^{2x} \Rightarrow 2^{\frac{7}{3}} = 2^{4x} \Rightarrow \frac{7}{3} = 4x \Rightarrow x = \frac{7}{12}$

3.57 Resuelve estas ecuaciones logarítmicas.

a) $\log_9(x+1) - \log_9(1-x) = \log_9(2x+3)$

b) $\log_9 \sqrt[5]{27} = 2x - 1$

c) $\log x = \frac{1}{2} \log(x+2)$

a) $\log_9(x+1) - \log_9(1-x) = \log_9(2x+3) \Rightarrow \log_9 \frac{x+1}{1-x} = \log_9(2x+3) \Rightarrow \frac{x+1}{1-x} = 2x+3 \Rightarrow x+1 = (2x+3)(1-x) \Rightarrow$
 $\Rightarrow x+1 = -x-2x^2+3 \Rightarrow 2x^2+2x-2=0 \Rightarrow x^2+x-1=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{Sí es solución} \\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{No es solución} \end{cases}$$

b) $\log_9 \sqrt[5]{27} = 2x - 1 \Rightarrow \sqrt[5]{27} = 9^{2x-1} \Rightarrow 3^{\frac{3}{5}} = 3^{4x-2} \Rightarrow \frac{3}{5} = 4x-2 \Rightarrow 3 = 20x-10 \Rightarrow 20x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{20}$

c) $\log x = \frac{1}{2} \log(x+2) \Rightarrow x = \sqrt{x+2} \Rightarrow x^2 = x+2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \Rightarrow \text{Sí es solución} \\ -1 \Rightarrow \text{No es solución} \end{cases}$

Sistemas de ecuaciones

3.58 Resuelve los siguientes sistemas lineales.

a) $\begin{cases} 4x - y = -8 \\ x - 5y = -21 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3t + 5m = 19 \\ 2t + 4m = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2(x-3) + 4(-3y+1) = 14 \\ 4(-2x+1) - (y+4) = 16 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 4x - y = -8 \\ x - 5y = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20x - 5y = -40 \\ x - 5y = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3t + 5m = 19 \\ 2t + 4m = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6t + 10m = 38 \\ 6t + 12m = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ t = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2(x-3) + 4(-3y+1) = 14 \\ 4(-2x+1) - (y+4) = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 12y = 4 \\ -8x - y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8x - 48y = 16 \\ -8x - y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

3.59 Encuentra la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales.

a) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ y^2 - 2x^2 = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 61 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 6 \\ x \cdot y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x - y)^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ y^2 - 2x^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ (2x + 1)^2 - 2x^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 4x - 6 = 0 \\ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ x = -3 \Rightarrow y = 2(-3) + 1 = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 6 \\ x \cdot y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{y^3} + y^3 = 6 \\ x = \frac{2}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 + y^6 = 6y^3 \Rightarrow y^6 - 6y^3 + 8 = 0 \text{ cambio } u = y^3 \Rightarrow u^2 - 6u + 8 = 0 \\ u = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \begin{cases} 4 \Rightarrow y = \sqrt[3]{4}; x = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{2} \\ 2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{2}; x = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4} \end{cases} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 61 \\ x \cdot y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3 \cdot 12 + y^2 = 61 \\ x = \frac{12}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{144}{y^2} + y^2 = 25 \Rightarrow y^4 - 25y^2 + 144 = 0 \\ \text{Cambio } u = y^2 \quad u^2 - 25u + 144 = 0 \end{cases}$

$$u = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \begin{cases} 16 \Rightarrow \pm 4 \\ 9 \Rightarrow \pm 3 \end{cases}$$

$y = 4, x = 3 \quad y = -4, x = -3 \quad y = 3, x = 4 \quad y = -3, x = -4$

d) $\begin{cases} (x - y)^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - y) = \pm 1 \\ (x - y)(x + y) = 7 \end{cases} \Rightarrow$

\Rightarrow Quedan dos posibles sistemas: $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$

AMPLIACIÓN

3.60 El gran matemático suizo Leonhard Euler planteaba el siguiente problema como introducción al álgebra:

“Dos campesinas llevaron en total cien huevos al mercado. Una de ellas tenía más mercancía que la otra, pero recibió por ella la misma cantidad de dinero que la otra. Una vez vendidos todos, la primera campesina dijo a la segunda: “Si yo hubiera llevado la misma cantidad de huevos que tú, habría recibido 15 cruceros”. La segunda contestó: “Y si yo hubiera vendido los huevos que tenías tú, habría sacado de ellos

$6 + \frac{2}{3}$ cruceros”. ¿Cuántos llevó cada una?

Una lleva x huevos, y la otra, $100 - x$; en total, las dos reciben y cruceros.

A la primera campesina le pagan a $\frac{y}{x}$ cruceros por huevo, mientras que a la segunda le pagan a $\frac{y}{100 - x}$

$$\begin{cases} (100 - x) \cdot \frac{y}{x} = 15 \\ x \cdot \frac{y}{100 - x} = 6 + \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{15x}{100 - x} \\ \frac{x}{100 - x} \cdot \frac{15x}{100 - x} = \frac{20}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 45x^2 = 20(100 - x)^2 \Rightarrow 25x^2 + 4000x - 200\,000 = 0 \\ x^2 + 160x - 8000 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-160 \pm \sqrt{25\,600 + 32\,000}}{2} = \begin{cases} 40 \\ -200 \end{cases}$$

La primera llevaba 40 huevos, y la segunda, 60.

- 3.61 La siguiente figura muestra la posición que debe ocupar una escalera de bomberos sobre dos edificios para que éstos puedan subir.



Calcula la longitud de la escalera y la posición sobre la que debe posarse la escalera en la acera.

$$\begin{cases} y^2 = 30^2 + x^2 \\ y^2 = 20^2 + (50 - x)^2 \end{cases} \Rightarrow 900 + x^2 = 400 + 2500 - 100x + x^2 \Rightarrow 100x = 2000 \Rightarrow x = 20 \text{ m}$$

$$y^2 = 900 + 400 = 1300 \Rightarrow y = 36,06 \text{ m debe medir}$$

La escalera debe medir 36,06 m y estar situada a 20 m de la primera casa.

- 3.62 En la Antigüedad estaba muy extendida en la India la idea de expresar los enunciados de los problemas en verso. Uno de esos problemas, enunciado en prosa, es el siguiente.

“Un grupo de abejas, cuyo número era igual a la raíz cuadrada de la mitad de todo su enjambre, se posó sobre un jazmín, habiendo dejado muy atrás a $\frac{8}{9}$ del enjambre; solo una abeja del mismo enjambre revoloteaba en torno a un loto, atraída por el zumbido de una de sus amigas. ¿Cuántas abejas formaban el enjambre?”

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{1}{9}x + 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{x^2}{81} + \frac{2x}{9} + 1 \Rightarrow 2x^2 - 45x + 162 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{45 \pm \sqrt{2025 - 1296}}{4} = \left\langle \frac{18}{\frac{9}{4}} \right\rangle$$

El enjambre lo formaban 18 abejas.

- 3.63 Resuelve los siguientes sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas utilizando los mismos métodos que con dos ecuaciones.

a)
$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + 3y - z = -7 \\ x + 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ x - 3y + 4z = 5 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + 3y - z = -7 \\ x + 5y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ 2x + 3y - z = -7 \\ 2x + 10y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ -5y + 3z = 19 \\ -12y - 4z = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ -60y + 36z = 228 \\ -60y - 20z = 60 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 12 \\ -60y + 36z = 228 \\ 56z = 168 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ x - 3y + 4z = 5 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ 5x - 15y + 20z = 25 \\ 5x - 5y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ +17y - 21z = -29 \\ +7y - 6z = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ +119y - 147z = -203 \\ +119y - 102z = -68 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = -4 \\ +119y - 147z = -203 \\ -45z = -135 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

3.64 María y Bianca forman pareja para realizar el trabajo en grupo que ha encargado la profesora de Biología sobre los efectos de las drogas en el organismo. Si hicieran el trabajo conjuntamente, tardarían 2 horas. María, ella sola, emplearía 3 horas más que Bianca, también en solitario.

¿Cuántas horas tardaría cada una de ellas por separado en hacer el trabajo?

Bianca tardaría x horas; en una hora realiza $\frac{1}{x}$ del trabajo.

María tardaría $x + 3$ horas; en una hora realiza $\frac{1}{x + 3}$ del trabajo.

Entre las dos juntas tardarían 2 horas; en una hora realizan $\frac{1}{2}$ del trabajo.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2(x + 3)}{2x(x + 3)} + \frac{2x}{2x(x + 3)} = \frac{x(x + 3)}{2x(x + 3)} \Rightarrow 2x + 6 + 2x = x^2 + 3x \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Bianca tardaría 3 horas, y María, 6.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

3.65 Cinco animales

Se está realizando un estudio sobre la evolución de ciertas características físicas de cinco especies animales a lo largo de su vida. Para ello se ha observado, en particular y de forma especial, a un ejemplar de cada una de ellas.

Una de las variables que interesan para el estudio es la masa corporal que tenía cada uno de esos cinco ejemplares hace 18 meses. Inexplicablemente, los únicos datos con los que se cuenta son los ofrecidos en la siguiente tabla.

Animales	Masa conjunta (kg)	Animales	Masa conjunta (kg)
Perro y gato	30	Gato y cerdo	93
Perro y pato	27	Gato y cabra	72
Perro y cerdo	107	Pato y cerdo	90
Perro y cabra	86	Pato y cabra	69
Gato y pato	13	Cerdo y cabra	149

Calcula la masa que tenía el cerdo en esa época.

Si se suman todos los valores ofrecidos por la tabla, se obtiene cuatro veces la masa de los cinco animales juntos.

$$\text{Así: Perro} + \text{Gato} + \text{Pato} + \text{Cerdo} + \text{Cabra} = \frac{30 + 27 + \dots + 149}{4} = \frac{736}{4} = 184$$

$$\text{Por tanto: Cerdo} = 184 - (\text{Perro} + \text{Gato}) - (\text{Pato} + \text{Cabra}) = 184 - 30 - 69 = 85 \text{ kg}$$

3.66 Ecuaciones relacionadas

¿Es posible resolver dos ecuaciones a la vez? Sigue estos pasos y compruébalo.

a) Resuelve estas ecuaciones.

$$1. 2x^2 + 3x - 5 = 0 \quad 2. -5x^2 + 3x + 2 = 0$$

b) Resuelve también estas otras ecuaciones.

$$1. 18x^2 - 9x - 2 = 0 \quad 2. -2x^2 - 9x + 18 = 0$$

c) Si se sabe que $x = r$ es una solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, comprueba que $\frac{1}{r}$ es una solución de la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$.

d) Sin necesidad de resolver las ecuaciones, completa la tabla.

Ecuación	Soluciones
$x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$	$x = \sqrt{2} \quad x = -2\sqrt{2}$
$-4x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$	
$2x^2 - 7x - 4 = 0$	$x = 4 \quad x = -\frac{1}{2}$
$4x^2 + 7x - 2 = 0$	
$2x^2 - x - 1 = 0$	$x = 1 \quad x = -\frac{1}{2}$
	$x = 1 \quad x = -2$

$$a) x = \frac{-3 \pm 7}{4} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{-3 \pm 7}{-10} = \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ x = 1 \end{cases}$$

$$b) x = \frac{9 \pm 15}{36} = \begin{cases} x = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} \\ x = -\frac{6}{36} = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$x = \frac{9 \pm 15}{-4} = \begin{cases} x = \frac{24}{-4} = -6 \\ x = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

c) Sabemos que $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$

Pero:

$$c \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{r} + a = \frac{c}{r^2} + \frac{b}{r} + a = \frac{c + br + ar^2}{r^2} = \frac{0}{r^2} = 0$$

Por tanto, $\frac{1}{r}$ es solución de la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$.

d)

Ecuación	Soluciones
$x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$	$x = \sqrt{2} \quad x = -2\sqrt{2}$
$-4x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$	$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$
$2x^2 - 7x - 4 = 0$	$x = 4 \quad x = -\frac{1}{2}$
$4x^2 + 7x - 2 = 0$	$x = \frac{1}{4} \quad x = -2$
$2x^2 - x - 1 = 0$	$x = 1 \quad x = -\frac{1}{2}$
$-x^2 - x + 2 = 0$	$x = 1 \quad x = -2$

AUTOEVALUACIÓN

3.A1 Encuentra la solución de la siguiente ecuación de primer grado.

$$\frac{3(-2x + 1)}{2} - 5(x - 3) = \frac{3x - 1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$-12x + 6 - 20x + 60 = 3x - 1 + 2 \Rightarrow -35x = -65 \Rightarrow x = \frac{13}{7}$$

3.A2 Resuelve esta ecuación de segundo grado: $\frac{4x + 5}{3} = \frac{1}{2x + 3}$

$$(4x + 5)(2x + 3) = 3 \Rightarrow 8x^2 + 22x + 12 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 11x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 96}}{8} = \left\langle \begin{matrix} -3 \\ -2 \end{matrix} \right.$$

3.A3 Halla la solución de esta ecuación radical: $\sqrt{4x + 13} + 2 = \sqrt{-2x + 3}$

$$4x + 13 + 4\sqrt{4x + 13} + 4 = -2x + 3 \Rightarrow 2\sqrt{4x + 13} = -3x - 7 \Rightarrow 16x + 52 = 9x^2 + 42x + 49 \Rightarrow \\ \Rightarrow 9x^2 + 26x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-26 \pm \sqrt{676 + 108}}{18} = \left\langle \begin{matrix} \frac{1}{9} \\ -3 \end{matrix} \right.$$

Comprobación: $\begin{cases} x = \frac{1}{9} & \sqrt{4\frac{1}{9} + 13} + 2 \neq \sqrt{-2\frac{1}{9} + 3} \Rightarrow \text{No es solución.} \\ x = -3 & \sqrt{-12 + 13} + 2 = \sqrt{6 + 3} \Rightarrow \text{Sí es solución.} \end{cases}$

3.A4 Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{x^2 - 3}{2} = \frac{-3}{2x^2 + 1}$

b) $\frac{3}{x - 2} + \frac{8}{x + 5} = \frac{x + 1}{x^2 + 3x - 10}$

a) $(x^2 - 3)(2x^2 + 1) = -6 \Rightarrow 2x^4 - 5x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \text{Cambio: } u = x^2 \Rightarrow 2u^2 - 5u - 3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow u = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \left\langle \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{matrix} \right. \Rightarrow \text{No es solución} \\ 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \text{Sí es solución}$$

b) $\frac{3}{x - 2} + \frac{8}{x + 5} = \frac{x + 1}{(x - 2)(x + 5)} \Rightarrow \frac{3(x + 5)}{(x - 2)(x + 5)} + \frac{8(x - 2)}{(x - 2)(x + 5)} = \frac{x + 1}{(x - 2)(x + 5)} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3x + 15 + 8x - 16 = x + 1 \Rightarrow 10x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

3.A5 Halla la solución de esta ecuación de grado 4: $6x^4 + 7x^3 - 52x^2 - 63x - 18 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} 6 & 6 & 7 & -52 & -63 & -18 \\ 3 & & 18 & 75 & 69 & 18 \\ \hline & 6 & 25 & 23 & 6 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} -3 & 6 & 25 & 23 & 6 \\ -3 & & -18 & -21 & -6 \\ \hline & 6 & 7 & 2 & 0 \end{array} \quad x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{12} = \left\langle \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \end{matrix} \right.$$

$$P(x) = (x - 3)(6x^3 + 25x^2 + 23x + 6) = (x - 3)(x + 3)(6x^2 + 7x + 2) = 6(x - 3)(x + 3)\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Soluciones: $x = 3, x = -3, x = -\frac{2}{3}, x = -\frac{1}{2}$

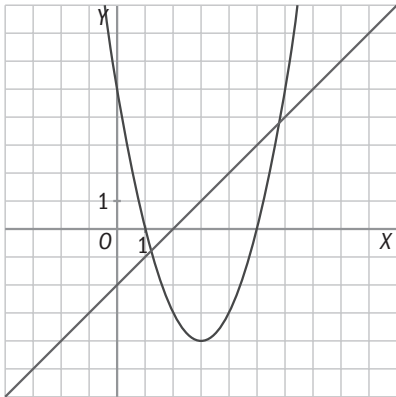
3.A6 Resuelve la siguiente ecuación logarítmica: $\log_3 \sqrt[5]{81} = 3x + 2$

$$\log_3 \sqrt[5]{81} = 3x + 2 \Rightarrow \sqrt[5]{81} = 3^{3x + 2} \Rightarrow 3^{\frac{4}{5}} = 3^{3x + 2} \Rightarrow \frac{4}{5} = 3x + 2 \Rightarrow 4 = 15x + 10 \Rightarrow 15x = -6 \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$$

3.A7 Calcula la solución de esta ecuación exponencial: $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0 \text{ cambio } u = 3^x \Rightarrow u^2 - 10u + 9 = 0 \Rightarrow u = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \begin{cases} 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2 \\ 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

3.A8 Averigua cuáles son las ecuaciones del sistema cuya representación gráfica es la siguiente.
¿Cuáles son las soluciones del sistema?



$$\begin{cases} x - y = 2 \\ y = (x - 1)(x - 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = x^2 - 6x + 5 \\ x^2 - 7x + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 28}}{2} = \begin{cases} \frac{7 + \sqrt{21}}{2} \Rightarrow y = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \\ \frac{7 - \sqrt{21}}{2} \Rightarrow y = \frac{3 - \sqrt{21}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

3.A9 Encuentra la solución del siguiente sistema de ecuaciones no lineales. $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 29 \\ x^2 - 4y = 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 29 \\ 3x^2 - 12y = 15 \end{cases} \Rightarrow y^2 + 6y - 7 = 0 \Rightarrow \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \begin{cases} 1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ -7 \Rightarrow x^2 = -23 \Rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$$

$$\frac{2y^2 + 12y = 14}{2y^2 + 12y = 14}$$

Soluciones: $x = 3, y = 1$ $x = -3, y = 1$

MURAL DE MATEMÁTICAS

MATE TIEMPOS

¿Dónde está el error?

En la resolución de esta ecuación hay un error.

$$\frac{2x + 3}{4x + 6} = 2 \rightarrow 2x + 3 = 8x + 12 \rightarrow -6x = 9 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

¿Puedes encontrarlo? ¿Sabrías resolver correctamente la ecuación?

Una ecuación especial

La primera idea que surge es que al ser el denominador el doble que el numerador, el cociente no puede ser igual a 2, luego la ecuación no tiene solución.

Resolviendo algebraicamente la ecuación se tiene:

$$2x + 3 = 2(4x + 6) \Rightarrow 2x + 3 = 8x + 12 \Rightarrow 2x - 8x = 12 - 3 \Rightarrow -6x = 9$$

$$x = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$$

Aunque algebraicamente la ecuación tiene solución, debe hacerse notar al estudiante que antes de iniciar un problema debe analizarlo y que en este caso la ecuación tiene un dominio cuyos valores deben ser diferentes a $-\frac{3}{2}$, o sea $4x + 6 \neq 0$.

$$D: \mathbf{R} - \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

Como el resultado es de $-\frac{3}{2}$, la ecuación no tiene solución en su dominio.